ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΠΑΛ - ΤΡΙΤΗ 2/6/26
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - ΑΛΓΕΒΡΑ

Θέμα Α

Α1) Σχ. βιβλίο σελ 65.

Α2) Σχ. βιβλίο σελ 87

Α3) Σχ. βιβλίο σελ 27

Α4) α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ) Λάθος
ε) Σωστό

Θέμα Β

Β1) Δίνεται $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$, $x\in\mathbb{R}$

Επομένως: $f'(x)=\frac{1}{3}\cdot 3x^2-2x-3 = x^2-2x-3$

Β2) Θέτουμε $f'(x)=0$ άρα έχουμε $x^2-2x-3=0$

Είναι: $\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16$

άρα $x_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm 4}{2}=$ $\frac{6}{2}=3$ ή $\frac{-2}{2}=-1$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			τ.μ.		τ.ε.		

- η f είναι γν. αύξουσα στο $(-\infty,-1]$ και στο $[3,+\infty)$
- η f είναι γν. φθίνουσα στο $[-1,3]$
- η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=-1$

το $f(-1)=\frac{1}{3}(-1)^3-(-1)^2-3\cdot(-1)+1=-\frac{1}{3}-\cancel{1}+3+\cancel{1}=$
$=3-\frac{1}{3}=\frac{9}{3}-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$

• η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=3$ το
$f(3) = \frac{1}{3}\cdot 3^3 - 3^2 - 3\cdot 3 + 1 = \cancel{9} - \cancel{9} - 9 + 1 = -8$

B3) Η εξίσωση εφαπτομένης της f στο $A(0, f(0))$ είναι της μορφής $\psi = \lambda x + \beta$.

Έχουμε: $\lambda = f'(0) = -3$

Θέτουμε όπου $x \to 0$ και $\psi \to f(0) = 1$

κι έχουμε: $1 = (-3)\cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$

Συνεπώς η ζητούμενη ευθεία είναι η $y = -3x + 1$

B4) Έχουμε: $\lim\limits_{x \to -1} \frac{f'(x)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x+1} =$

$= \lim\limits_{x \to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-3)}{\cancel{x+1}} = -1 - 3 = -4$

Θέμα Γ

Γ1) Έχουμε $\dfrac{4+5+4+k+0+3+7}{7} = 4$

$\Leftrightarrow 23+k=28 \Leftrightarrow k=5$.

Γ2) Τοποθετούμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά

$0, 3, 4, 4, 5, 5, 7$

Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός ($\nu=7$), η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση δηλαδή το 4.

Γ3) Έχουμε:

$$S^2 = \frac{(4-4)^2+(5-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(0-4)^2+(3-4)^2+(7-4)^2}{7}$$

$$s^2 = \frac{0^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + (-4)^2 + (-1)^2 + 3^2}{7}$$

$$s^2 = \frac{1+1+16+1+9}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

Γ4) Έχουμε $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} \cdot 100\% = \frac{2}{|4|} \cdot 100\% = 0{,}5$

ή 50%.

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$$

Επειδή $CV > 10\%$ το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΟΜΟΣΠΟΝΔΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ

Δ1) Έχουμε: $E = x \cdot \psi \iff x \cdot \psi = 100$ άρα

$$\psi = \frac{100}{x}$$

Είναι $\Pi = 2x + 2\psi \iff \Pi(x) = 2x + 2 \cdot \frac{100}{x}$

άρα $\Pi(x) = 2x + \frac{200}{x}$, $x > 0$

Δ2) Έχουμε $\Pi'(x) = (2x)' + \frac{\overset{0}{\cancel{(200)'}} \cdot x - 200(x)'}{x^2}$

$$\Pi'(x) = 2 + \frac{-200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2}$$

θέτουμε $\Pi'(x) = 0 \iff 2x^2 - 200 = 0$

$$2x^2 = 200$$

$$x^2 = 100$$

$\boxed{x = 10}$ ή $x = -10$ απορρίπτεται διότι $x > 0$

Άρα:

x	0		10		$+\infty$
Π'		$-$	0	$+$	
Π		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

. Η "Π" είναι $\downarrow$ στο $(0, 10]$

$\uparrow$ στο $[10, +\infty)$

Η "Π" παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=10$ το $\Pi(10)$ επομένως για $x=10$ έχουμε και $y=10$ δηλαδή το σχήμα γίνεται τετράγωνο.

Δ3) Για $x_1, x_2 \in (0,10)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε ότι η Π είναι γν. φθίνουσα άρα

$\Pi(x_1) > \Pi(x_2) \iff \Pi(x_1) - \Pi(x_2) > 0$

Άρα εφόσον $x_1 - x_2 < 0$ είναι $A < 0$

Δ4) Έχουμε

$$\lim_{x\to 10}\frac{\Pi'(x)}{\sqrt{10x}-10}=\lim_{x\to 10}\frac{\frac{2(x^2-100)}{x^2}}{\frac{\sqrt{10x}-10}{1}}=$$

$$=\lim_{x\to 10}\frac{2(x^2-100)}{x^2(\sqrt{10x}-10)}=\lim_{x\to 10}\frac{2(x-10)(x+10)(\sqrt{10x}+10)}{x^2(\sqrt{10x}-10)(\sqrt{10x}+10)}=$$

$$=\lim_{x\to 10}\frac{2(x-10)(x+10)(\sqrt{10x}+10)}{x^2(\sqrt{10x}^2-10^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 10}\frac{2(x-10)(x+10)(\sqrt{10x}+10)}{x^2(10x-100)}=$$

$$=\lim_{x\to 10}\frac{2\cancel{(x-10)}(x+10)(\sqrt{10x}+10)}{10x^2\cancel{(x-10)}}=\frac{2\cdot(10+10)(\sqrt{100}+10)}{10\cdot 10^2}$$

$$=\frac{2\cdot 2\cancel{0}\cdot 2\cancel{0}}{1\cancel{0}\cdot 10\cancel{0}}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}.$$